GEOMETRIA EM OLIMPIADAS

(DESENVOLVIDO POR JUCIELE CARINE DECEZARE)

Conteúdo: Geometria.

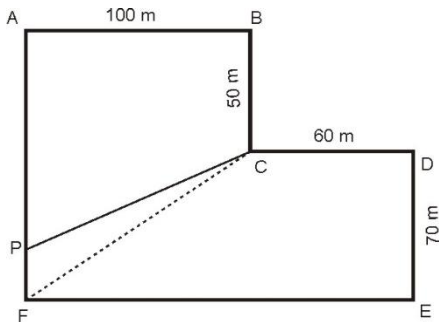
Séries: Finais do ensino fundamental.

Material: Fichas contendo as atividades.

Desenvolvimento: Consiste em uma atividade elaborada para ser desenvolvida em duplas ou em trios, e tem como objetivos auxiliar os alunos na preparação para participar de Olimpíadas de Matemáticas, as quais são promovidas em âmbito nacional e observa-se nas escolas pouco preparo para as mesmas, dessa maneira não sendo atingidos bons resultados.

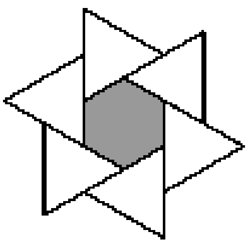
FICHAS

1. (OBM-2012) João e Maria herdaram um terreno, representado pelo polígono ABCDEF. Havia uma cerca reta separando o terreno em duas partes, mas como as áreas eram diferentes, João e Maria resolveram deslocá-la, mantendo-a reta, de forma que a extremidade em F fosse para o ponto P. Com isso, as duas áreas tornaram-se iguais. Supondo que os ângulos em A, B, D, E e F são retos, de quantos metros foi o deslocamento FP?



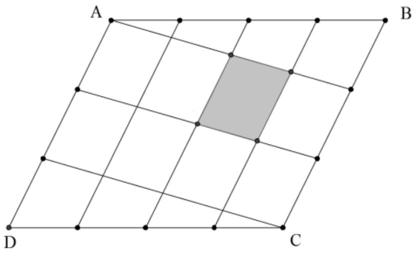
A) 5 **B)** 8 **C)** 10 **D)** 12 **E)** 20

2. (OBM-2012) A figura mostra seis triângulos equiláteros com lados de comprimento 2 e um hexágono regular de lados de comprimento 1. Qual é a fração da área total que está pintada?



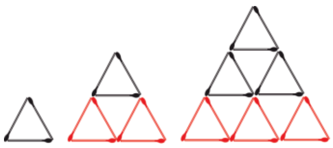
A) $\frac{1}{8}$ **B)** $\frac{1}{7}$ **C)** $\frac{1}{6}$ **D)** $\frac{1}{5}$ **E)** $\frac{1}{4}$

3. (OBM-2012) Os lados *AB* e *DC* do paralelogramo *ABCD* foram divididos em 4 segmentos iguais. Os lados *AD* e *BC* foram divididos em 3 segmentos iguais. Os pontos de divisão foram conectados como indica a figura abaixo. Se a área de *ABCD* é 84, determine a área sombreada.



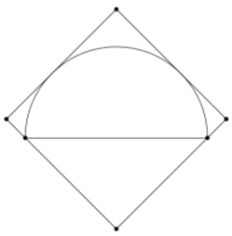
A) 1 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 7 **E)**12

4. (OBMEP-2012)Renata montou uma sequência de triângulos com palitos de fósforo, seguindo o padrão indicado na figura. Um desses triângulos foi construído com 135 palitos de fósforo.Quantos palitos formam o lado desse triângulo?



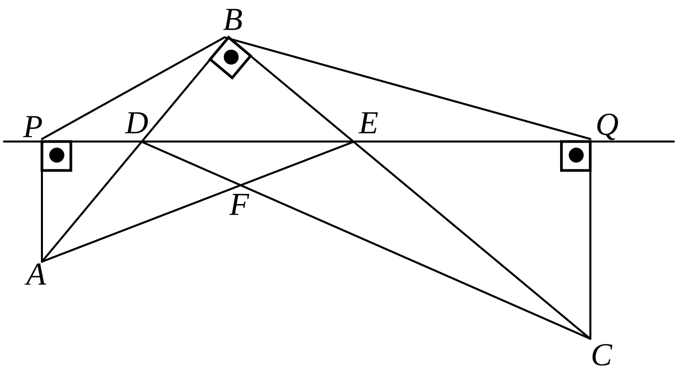
A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

5. (OBM-2012) Na figura abaixo temos um semicírculo de raio 1 inscrito em um quadrado de modo que seu centro passe por uma das diagonais do quadrado. Qual é a área do quadrado?



A) $\frac{3}{2}+\sqrt{2}$ **B)** $1+2\sqrt{2}$ **C)** $5+\frac{\sqrt{2}}{2}$ **D)** 4 **E)** $\frac{2}{3}+\sqrt{2}$

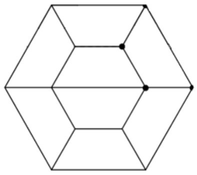
6. (OBM-2012) Na figura a seguir, o ângulo $A\hat{B}C$ é reto; a reta *r* corta os segmentos *AB* e *BC* em *D* e *E*, respectivamente; as retas *CD* e *AE* se cortam em *F*; *P* e *Q* são as projeções ortogonais de *A* e *C* sobre a reta *r*, respectivamente.



Sendo o ângulo entre as retas *CD* e *AE* igual a $m(A\hat{F}D)=40^\circ$, a medida de $P\hat{B}Q$, em graus, é

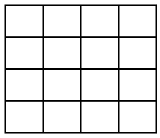
A) 110 **B)** 120 **C)** 130 **D)** 140 **E)** 160

7. (OBMEP-2012) A figura foi formada por oito trapézios isósceles idênticos, cuja base maior mede 10 cm. Qual é a medida, em centímetros, da base menor de cada um desses trapézios?



A) 4
B) 4,5
C) 5
D) 5,5
E) 6

8. (OBM-2012) Renan desenhou um tabuleiro 4×4, como mostra a figura abaixo, e contou todos os quadrados com lados paralelos aos lados do tabuleiro com vértices escolhidos dentre os vértices dos quadradinhos do tabuleiro e obteve 30 quadrados.

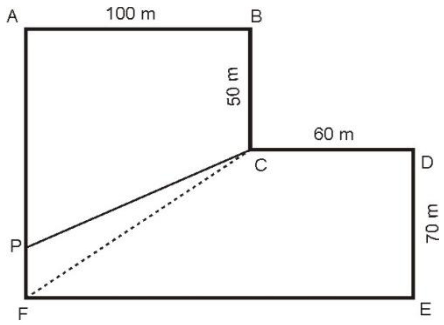


Que número Renan teria obtido se ele tivesse feito o mesmo com um tabuleiro 4×2012?

A) 30180 **B)** 30115 **C)** 20110 **D)** 15090 **E)** 8048

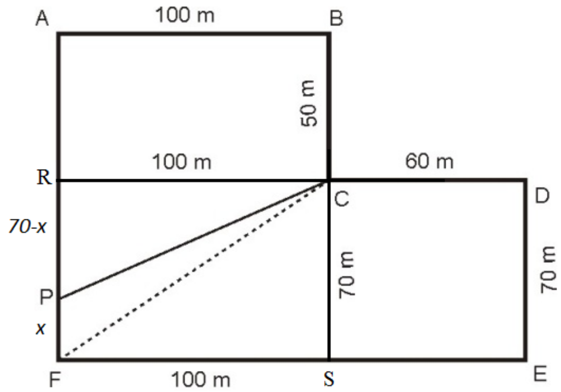
PERGUNTAS E RESPOSTAS

9. (OBM-2012) João e Maria herdaram um terreno, representado pelo polígono ABCDEF. Havia uma cerca reta separando o terreno em duas partes, mas como as áreas eram diferentes, João e Maria resolveram deslocá-la, mantendo-a reta, de forma que a extremidade em F fosse para o ponto P. Com isso, as duas áreas tornaram-se iguais. Supondo que os ângulos em A, B, D, E e F são retos, de quantos metros foi o deslocamento FP?



A) 5 **B)** 8 **C)** 10 **D)** 12 **E)** 20

(B) Considere a seguinte figura:



Veja que $RC = AB = FS = 100m$, pois $ABCR$ e $ABSF$ são retângulos. De modo análogo, $RF = DE = CS = 70m$. Se tomarmos $FP = x$ a igualdade das regiões $ABCPA$ e $DEFPC$ é dada por:

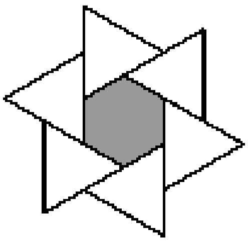
$$[ABCR] + [RCP] = [DESC] + [CSFP] \rightarrow$$

$$50.100 + \frac{(70 - x).100}{2} = 70.60 + \frac{(70 + x).100}{2} \rightarrow$$

$$5000 - 4200 = \frac{((70 + x) - (70 - x)).100}{2} \rightarrow 800 = \frac{2x.100}{2} \rightarrow$$

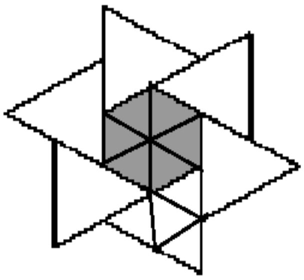
$$800 = 100.x \rightarrow x = 8$$

10. (OBM-2012) A figura mostra seis triângulos equiláteros com lados de comprimento 2 e um hexágono regular de lados de comprimento 1. Qual é a fração da área total que está pintada?



A) $\frac{1}{8}$ **B)** $\frac{1}{7}$ **C)** $\frac{1}{6}$ **D)** $\frac{1}{5}$ **E)** $\frac{1}{4}$

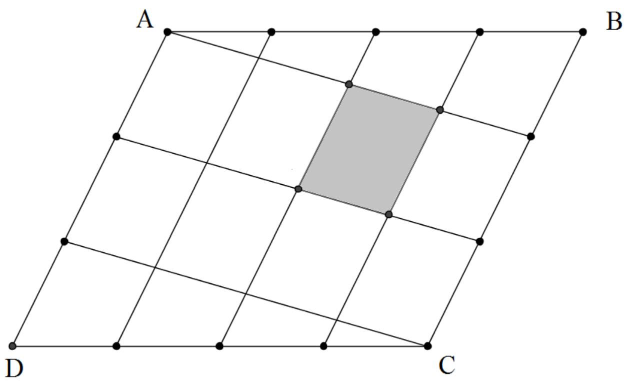
(D) Como o hexágono é regular e cada um dos triângulos é equilátero é possível dividir toda a figura em triângulos equiláteros de lado 1, como feito no hexágono e em um dos 6 triângulos na figura a seguir:



Assim, pode-se calcular a razão entre as áreas pela razão entre a quantidade de triângulos no hexágono e quantidade total, tendo assim:

$$\frac{(triang\ no\ hex)}{(triang\ no\ hex) + 6.(triang\ num\ traingulo)} = \frac{6}{6 + 6.4} = \frac{1}{1 + 4} = \frac{1}{5}$$

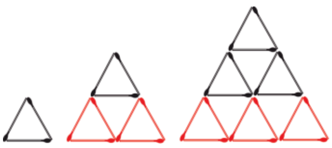
11. (OBM-2012) Os lados *AB* e *DC* do paralelogramo *ABCD* foram divididos em 4 segmentos iguais. Os lados *AD* e *BC* foram divididos em 3 segmentos iguais. Os pontos de divisão foram conectados como indica a figura abaixo. Se a área de *ABCD* é 84, determine a área sombreada.



A) 1 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 7 **E)**12

(D) Considere o paralelogramo *AECF*. Como o lado $AF = \frac{2}{3}AD$, podemos concluir que a área do *AECF* vale $\frac{2}{3} \cdot 84 = 56$. Como este último está dividido em 8 paralelogramos iguais, podemos concluir que a área sombreada vale $\frac{1}{8} \cdot 56 = 7$.

12. (OBMEP-2012)Renata montou uma sequência de triângulos com palitos de fósforo, seguindo o padrão indicado na figura. Um desses triângulos foi construído com 135 palitos de fósforo.Quantos palitos formam o lado desse triângulo?

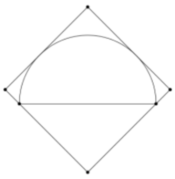


A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

ALTERNATIVA D

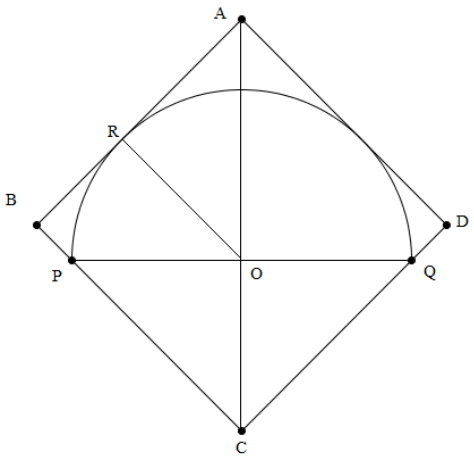
O primeiro triângulo da sequencia é formado por três palitos. Para *n* □ □ 2, o triângulo que ocupa a posição *n* na sequencia é formado acrescentando *n* triângulos iguais ao primeiro ao triângulo precedente. Logo, o total de palitos utilizados para construir o triângulo que ocupa a posição *n* na sequencia é 3.1+3.2+...+3n=3.(1+2+...+n)=3n(n+1)/2=135. Para saber em qual triângulo foram
usados 135 palitos, devemos resolver a equação 3*n*(*n* □ 1)/2□ 135, ou seja *n*(*n*□ 1)□ 90. Por inspeção, vemos que a raiz positiva dessa equação é *n* □ □ 9 ; logo o triângulo que estamos procurando é o nono triângulo da sequencia, cujo lado tem 9 palitos.

13. (OBM-2012) Na figura abaixo temos um semicírculo de raio 1 inscrito em um quadrado de modo que seu centro passe por uma das diagonais do quadrado. Qual é a área do quadrado?



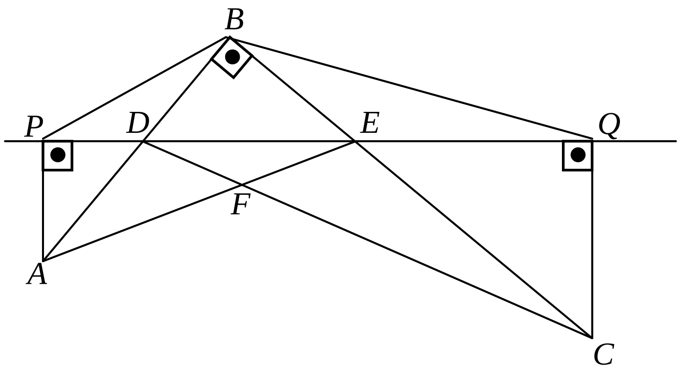
A) $\frac{3}{2}+\sqrt{2}$ **B)** $1+2\sqrt{2}$ **C)** $5+\frac{\sqrt{2}}{2}$ **D)** 4 **E)** $\frac{2}{3}+\sqrt{2}$

Alternativa (A)



Seja *O* o centro da semicircunferência descrita no enunciado, *P* e *Q* os pontos como na figura e *R* o ponto de tangência da semicircunferência com o lado *AB*. Temos que $OR=1$ e $OR \perp AB$. Como *O* está na diagonal *AC*, temos que $O\hat{A}B = 45°$. Assim, $OA = OR\sqrt{2} = \sqrt{2}$. Além disso, *OC* é altura e mediana relativa à hipotenusa no triângulo retângulo *PQC*, cuja hipotenusa é 2. Assim, *OC* = 1. Portanto, a diagonal do quadrado vale $1+\sqrt{2}$ e daí sua área é $\frac{1}{2}\cdot\left(1+\sqrt{2}\right)^2 = \frac{3+2\sqrt{2}}{2} = \frac{3}{2}+\sqrt{2}$.

14. (OBM-2012) Na figura a seguir, o ângulo $A\hat{B}C$ é reto; a reta *r* corta os segmentos *AB* e *BC* em *D* e *E*, respectivamente; as retas *CD* e *AE* se cortam em *F*; *P* e *Q* são as projeções ortogonais de *A* e *C* sobre a reta *r*, respectivamente.

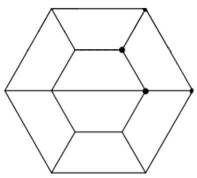


Sendo o ângulo entre as retas *CD* e *AE* igual a $m(A\hat{F}D) = 40^\circ$, a medida de $P\hat{B}Q$, em graus, é

A) 110 **B)** 120 **C)** 130 **D)** 140 **E)** 160

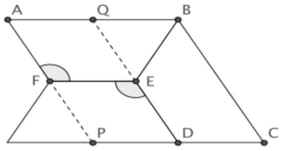
(C) Como $A\hat{P}E = A\hat{B}E = 90^\circ$, o quadrilátero *APBE* é inscritível. Da mesma maneira, o quadrilátero *DBQC* é inscritível. Assim, temos que $P\hat{B}A = P\hat{E}A$ e que $Q\hat{B}C = Q\hat{D}C$. Daí, $P\hat{B}Q = P\hat{B}A + 90^\circ + Q\hat{B}C = P\hat{E}A + 90^\circ + Q\hat{D}C$. Mas no triângulo *DEF*, temos pelo teorema do ângulo externo que $40^\circ = A\hat{F}D = P\hat{E}A + Q\hat{D}C$. Assim, $P\hat{B}Q = 90^\circ + 40^\circ = 130^\circ$.

15. (OBMEP-2012) A figura foi formada por oito trapézios isósceles idênticos, cuja base maior mede 10 cm. Qual é a medida, em centímetros, da base menor de cada um desses trapézios?



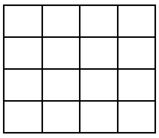
A) 4 B) 4,5 C) 5 D) 5,5 E) 6

ALTERNATIVA C



A figura ao lado mostra uma parte do hexágono formada por três trapézios. Prolongamos os segmentos *AF* e *DE* para obter os pontos *P* e *Q*, como indicado. Como os trapézios são idênticos, os ângulos assinalados são iguais; segue que *AP* e *QD* são paralelos. Como *PD* e *EF*, sendo bases de um trapézio, também são paralelos, segue que *PDEF* é um paralelogramo; em particular, temos *PF* = *DE* . Da igualdade dos trapézios temos *AF* = *DE* = *EF* e concluímos que *AP* = 2*EF* . Notamos agora que *APCB* também é um paralelogramo; logo *BC* = *AP* = 2*EF* e como *BC* = 10 segue que *EF* = 5 . Outra solução é a seguinte. Como os trapézios são idênticos, o hexágono que eles formam é regular. Como o ângulo interno a desse hexágono mede 120°, o ângulo b mede 120°/2=60. Logo o triângulo *ABC* é equilátero; como *AC* =*CD* temos *BC* = *CD* e segue que o paralelogramo *BCDE* é um losango. Assim, *B* é o ponto médio de *AE* e então *AC* □ □*BE* □ □ ½ AE = ½ X 10 = 5 cm.

16. (OBM-2012) Renan desenhou um tabuleiro 4×4, como mostra a figura abaixo, e contou todos os quadrados com lados paralelos aos lados do tabuleiro com vértices escolhidos dentre os vértices dos quadradinhos do tabuleiro e obteve 30 quadrados.



Que número Renan teria obtido se ele tivesse feito o mesmo com um tabuleiro 4×2012?
A) 30180 **B)** 30115 **C)** 20110 **D)** 15090 **E)** 8048

(C) Vamos contar os quadrados de tamanhos 1×1, 2×2, 3×3 e 4×4.

i) Para cada linha do tabuleiro, temos 2012 quadrados 1×1. Logo, o total de quadrados 1×1 é: 2012×4

ii) Para cada duas linhas consecutivas do tabuleiro, temos 2011 quadrados 2×2. Logo, o total de quadrados 2×2 é: 2011×3.

iii) Para cada três linhas consecutivas do tabuleiro, temos 2010 quadrados 3×3. Logo, o total de quadrados 3×3 é: 2010×2.

iv) Para cada quatro linhas consecutivas do tabuleiro, temos 2009 quadrados 4×4. Logo, o total de quadrados 4×4 é: 2009×1.

Total: $2012\times4+2011\times3+2010\times2+2009\times1=20110$