Acadêmicas: Maiara Elis Lunkes, Cintia Schneider e Dândara Bellé.

Atividade envolvendo a Torre de Hanói

Solicitar que os alunos tragam papel EVA, palitos de churrasco, isopor, papel cartão, tesoura, compasso e régua.

Ao iniciar a aula, a professora anunciará que será feita a construção de um jogo, mas não o identifica. Para iniciar os alunos recortam o isopor na forma de um retângulo, o qual será a base do jogo, utilizando o papel cartão ele irá “encapar” este isopor e em seguida utilizando a régua medir a largura ideal e colocar três palitos de churrasco, com a mesma distância entre eles. Para finalizar com o EVA faça os discos que serão utilizados no jogo. Cabe ao professor disponibilizar aos alunos as medidas corretas.

Ao final da construção do jogo, será solicitado aos alunos se eles conhecem o que foi construído. Assim, apresentando-os que se trata de um jogo inventado pelo matemático francês Édouard Lucas em 1883, podendo contar a história da lenda deste jogo.

Após, será explicado que é uma torre com oito discos, inicialmente empilhados por tamanhos decrescentes em três pinos. O objetivo é transferir a torre inteira para um dos outros pinos, movendo apenas um disco de cada vez e nunca colocando um disco maior em cima de um menor.

Então, deixar os alunos manipularem o jogo para se familiarizarem com ele. Este é o fato importante de cada um construir o seu, afinal eles poderão utilizar para brincar e conhecê-lo e o professor não terá a desculpa de não usá-lo em sala de aula por não possuir na escola.

Em seguida, poderão ser abordados os conteúdos matemáticos, para isso peça que os alunos comecem jogando apenas com três peças, e depois passam para quatro, após cinco, então seis, até chegar o total de peças do jogo, incluindo uma de cada vez. A cada vez que o aluno introduz uma peça nova, solicite que ele conte o número mínimo de movimentos necessários. Assim os alunos perceberam que eles podem encontrar o menor número de movimentos para transferir a torre de um pino a outro, bem como uma regularidade entre as jogadas, obtendo uma solução para um número qualquer de discos.

Para facilitar, poderá solicitar que o aluno faça uma tabela contendo os dados de cada peça e o número de movimentos efetuados, assim facilitará a compreensão dessa regularidade entre os discos, ou seja, o aluno perceberá que cada peça terá uma razão 2 e que o número total de movimentos mínimos para cada quantidade de peças é a soma dos termos das respectivas linhas, desta forma será possível introduzir o conceito de Progressão Geométrica e também o de soma dos termos de uma PG.

Afinal, é fácil notar que cada termo posterior, a partir do segundo, é igual ao anterior, multiplicado por um número fixo, no caso o 2, e espera-se que os alunos percebam isso, atentando, posteriormente, para o fato de que toda seqüência que tiver essa lei de formação será denominada progressão geométrica. O número fixo pelo qual estamos multiplicando cada termo é chamado razão da progressão.

Portanto, a progressão geométrica é uma seqüencia de números não nulos em que cada termo posterior, a partir do segundo, é igual ao anterior multiplicado por um número fixo chamado razão da progressão. Obs. 2: A quantidade mínima de movimentos das torres com n discos é igual à soma de uma P.G. finita de razão 2, 1º termo igual a 1 e com número de termos igual ao números de discos da torre. Ao movimentarmos o número de discos, a quantidade de movimentos de cada peça cresce em P.G. de razão 2, com 1º termo igual a 1. O número de movimentos de uma torre com n discos é igual ao dobro de movimentos da torre com (n-1) discos, acrescido de 1 movimento.

Sendo assim, é possível utilizar-se da torre de Hanói para introduzir o conteúdo de progressões geométricas no Ensino Médio, trazendo o lúdico e instigando o interesse dos envolvidos, tanto do professor como dos alunos e assim superando paradigmas fortemente arraigados ao ensino de Matemática no Ensino Médio, na qual ouve-se muitos argumentos das impossibilidades de trabalhar Matemática com materiais didáticos neste nível de ensino.

Curso: Matemática-Licenciatura
Disciplina: Laboratório de ensino aprendizagem II
Profª Ms Deise Nivia Reisdoeifer
Acadêmicas: Rosangela Bautitz Da Silva e Suzamara Bautitz
Turma: 7ª fase/2012

Desafio com a Torre de Hanói

Objetivos: estimular o cálculo mental e o raciocínio lógico, trabalhar a função exponencial e gráfico dessa função.

Material: Torre de Hanói, papel, caneta, lápis, borracha, régua, fichas com os números de 1 a 6 e cronômetro.

Metodologia: divide-se a turma de alunos em quatro equipes ou mais. Apresentasse o jogo e as regras(só pode movimentar uma peça por vez; não pode uma peça maior ficar sobre a menor) e deixa os alunos manipular por alguns minutos para se familiarizarem.

Figura 1: Torre de Hanói
Fonte: www.mat.ibilce.unesp.br

Em seguida inicia-se a competição. Para isso o professor da turma terá um cronômetro e sorteará o número de peças que terá que movimentar. Cada equipe calculará o número de movimentos que terá que fazer através da equação $m = 2^n - 1$, onde m é o número de movimentos que terá que se fazer e n é o de peças que irão ser movimentadas. Posteriormente a equipe realiza os movimentos, quem fizer no menor tempo pontua (10 pontos). Assim até ser movimentada as 6 peças.

O desafio final consiste em cada equipe calcular quantos movimentos são necessários se tivéssemos 15 peças e desenhar o gráfico dessa função (figura 2). A equipe que terminar por primeiro pontua somando com os pontos que já tem, esse desafio final vale 50 pontos.

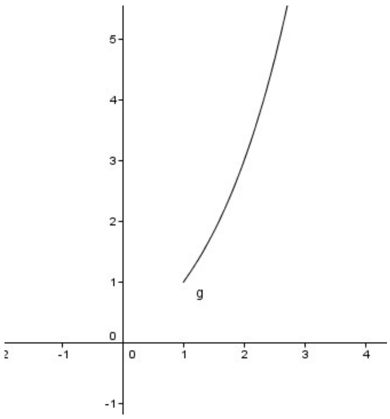


Figura 2: gráfico da função m= $2^n - 1$
Fonte: as autoras

REFERÊCIAS

Matemática na aprendizagem - Torre de Hanói. Disponível em <http://matematicanaaprendizagem.blogspot.com.br/2011/09/funcao-exponencial-utilizando-torre-de.html> Acesso em 16 mar 2015.

Torre de Hanói. Disponível em <www.mat.ibilce.unesp.br>. Acesso em 30 mar 2015

Jogo “Torre de Hanói”

Conteúdos:

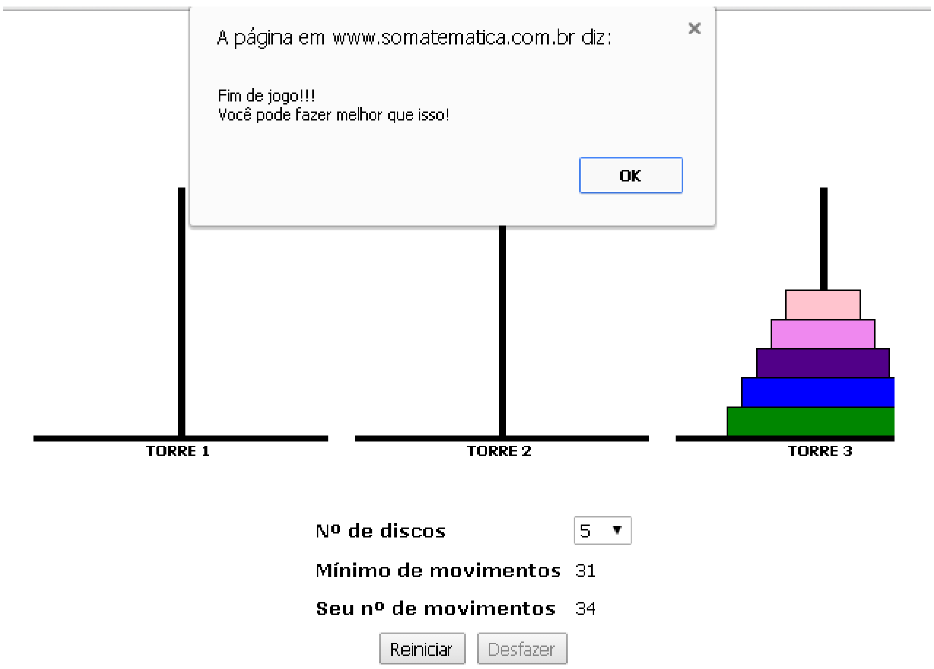
- Revisão de sequência numérica;
- Progressão geométrica.

Objetivos:

- Incentivar o raciocínio lógico;
- Revisar as sequências numéricas e introduzir progressão geométrica através no jogo Torre de Hanói;
- Investigar a sequência numérica do jogo Torre de Hanói;
- Despertar o gosto pela matemática por meio da metodologia de jogos e de investigação.

Desenvolvimento:

Os alunos serão levados ao laboratório de informática para jogar a Torre de Hanói on-line (http://www.somatematica.com.br/jogos/hanoi/). Todos deverão começar com o número mínimo de discos e aumentando sucessivamente, anotando o número mínimo de jogadas pelo número de discos.



No jogo on-line vai até 8 discos, mas o objetivo desta atividade é que os alunos investiguem uma sequência lógica.

Depois de jogar a Torre de Hanói, os alunos retornarão a sala de aula para realizar as seguintes atividades:

1) Construa um gráfico que represente a relação entre o número de peças e o número mínimo de movimentos para se realizar o jogo.
2) Você consegue observar uma sequência lógica nesse jogo?

   Obs: Basicamente os alunos deverão perceber que existe uma sequência e que está relacionada à potenciação. Várias ideias equivocadas poderão surgir, o professor deverá analisá-los e explicar aos alunos. Para ajudá-los na investigação poderá ser entregue a seguinte tabela:

Número de peças	Número mínimo de movimentos	Número mínimo de movimentos +1
1	1	2
2	3	4
3	7	8
4	15	16
5	31	32
6	63	64
7	127	128
8	255	256
9	511	512
10	1023	1024
N	$2^n - 1$	2^n

Podemos observar que (o número de jogadas +1) é um número do tipo 2x. Para encontrar o número de jogadas + 1 basta fazer a potenciação usando sempre o 2 da base e o número de discos (n) na potência.

Ex: Se o número de discos for 4:

$2^n = 2^4 = 16$, logo o número de jogadas + 1 é igual a 16.

Podemos então concluir que o número mínimo de jogadas é igual a: $2^n -1$.

A partir disso, o professor poderá dar início à revisão “Sequências Numéricas” e depois “Progressão Geométrica”.

Sequência Numérica

Sequência é sucessão, encadeamento de fatos que se sucedem.

É comum percebermos em nosso dia a dia conjuntos cujos elementos estão dispostos em certa ordem, obedecendo a uma sequência, como foi possível observar no jogo Torre de Hanói.

O estudo de sequência dentro da matemática é o conjunto de números reais dispostos em certa ordem. Assim chamado de **sequência numérica**.

Quando temos uma sequência numérica qualquer, representamos o seu 1º termo por a_1, assim sucessivamente, sendo o n-ésimo termo o a_n. Exemplo:

• (2, 4, 6, 8, 10) temos: $a_1 = 2$; $a_2 = 4$; $a_3 = 6$; $a_4 = 8$; $a_5 = 10$

A sequência acima é uma sequência finita, sua representação geral é (a_1, a_2, a_3,..., a_n). Para as sequências que são infinitas a representação geral é (a_1, a_2, a_3, a_n, ...).

Progressão Geométrica

Dizemos que uma sequência numérica constitui uma progressão geométrica quando, a partir do 2º termo, o quociente entre um elemento e seu antecessor for sempre igual.

Observe a sequência (2, 4, 8, 16, 32, 64,...), dizemos que ela é uma progressão geométrica, pois se encaixa na definição dada.

O termo constante da progressão geométrica é denominado razão.

an= é o enésimo termo (termo geral);

a_{1}= é o primeiro termo;

n= é o número de termos;

r= é a razão.

Exemplos:

1) Em uma progressão geométrica, temos que o 1º termo equivale a 4 e a razão igual a 3. Determine o 8º termo desta PG.

2) Dada a PG (3, 9, 27, 81, ...), determine o 20º termo.

3) Calcule o quarto e o sétimo termos da P. G. (3, -6, 12, …).

4) Na P. G. estritamente crescente (a1, a2, a3, …) tem-se a1 + a6 = 1025 e a3 . a4 = 1024. Determine a razão da progressão geométrica.

Avaliação: Será por meio do interesse e participação dos alunos durante as atividades desenvolvidas.

INSTITUTO FEDERAL CATARINENSE – CAMPUS CONCÓRDIA
Acadêmica: Patricia Presotto
Curso: Matemática - Licenciatura
Disciplina: Laboratório de Prática de Ensino-Aprendizagem II
Professora: Ms. Deise Nivia Reisdoefer
Série/Turma: MAT 2012/7

TORRE DE HANÓI

Conteúdo: Progressão aritmética e progressão geométrica.

Materiais utilizados: Tabuleiro, discos, lápis, papel, régua.

Desenvolvimento: O jogo “Torre de Ranói”, é composto de um tabuleiro com três pinos e seis discos de tamanhos diferentes, estes, possuem um furo no seu centro para o encaixe nos pinos. A distância entre os pinos deve ser próxima da medida do diâmetro do disco maior.

O desafio deste jogo consiste em transferir os discos, que devem estar inicialmente empilhados em um dos pinos em ordem decrescente de tamanho, com o maior deles na base e o menor no topo. Esta transferência pode ser feita para quaisquer dos outros pinos livres, no menor número de movimentos possíveis, movendo apenas um disco de cada vez e sem sobrepor um disco maior sobre outro menor. A disposição final dos discos deve ser igual a do início do jogo. A Torre de Hanói é um jogo de manuseio individual.

O número mínimo de movimentos necessários para resolver o problema depende do número de discos e a partir dessa dependência o objetivo é descobrir, de forma dedutiva, a relação matemática existente entre eles.

A cada jogada, a partir do primeiro disco, anotam-se em uma tabela os resultados organizados em duas colunas, uma para o número de discos e outra para o número de movimentos: para um disco um movimento; para dois discos três movimentos; para três discos sete movimentos e assim por diante até finalizar com os seis discos propostos inicialmente. As colunas determinam dois conjuntos numéricos, discos e movimentos e, à medida que o jogo se desenvolve, descreve-se a sequência desses números dentro de cada conjunto, como mostra a tabela abaixo:

Tabela 1: Relação entre o número de discos e movimentos

Nº de discos-D	Nº de movimentos-M
1	1
2	3
3	7
4	15
5	31
6	63

A partir desta tabela, pode-se trabalhar com o conteúdo de progressões.

A primeira coluna da tabela acima poderá ser trabalhada com progressão aritmética, pois a partir do primeiro número soma-se o número 1 (sendo que esse é a razão), para encontrar assim, o próximo número.

Na segunda coluna, pode-se trabalhar com progressão geométrica, pois a partir do número de discos, multiplica-se por 2 (sendo que esse é a razão), logo diminui-se 1 e encontra-se o número de movimentos.

Avaliação: Os alunos serão avaliados pelo comprometimento e pelo interesse para com a realização da atividade proposta, bem como a pontualidade de entrega dos trabalhos.